МИНИСТЕРСТВО СПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Великолукская государственная академия физической культуры и спорта»

УТВЕРЖДАЮ
Ректор ФГБОУ ВО «ВЛГАФК»
_______________ В.Н. Шляхтов
«_12_» ___01___ 2024 г.

Программа вступительного экзамена по математике

для направления подготовки

43.03.01 Сервис

Квалификация «бакалавр»

Великие Луки, 2024

Требования к уровню подготовки абитуриентов

для проведения

вступительного экзамена

по МАТЕМАТИКЕ

Код разде-ла	**Код контролиру-емого требования (умения)**	**Требования (умения), проверяемые заданиями экзаменационной работы**
1		**Уметь выполнять вычисления и преобразования**
	1.1	Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма
	1.2	Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования
	1.3	Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции
2		**Уметь решать уравнения и неравенства**
	2.1	Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы
	2.2	Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод
	2.3	Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы

3		**Уметь выполнять действия с функциями**
	3.1	Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций
	3.2	Вычислять производные и первообразные элементарных функций
	3.3	Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции
4		**Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами**
	4.1	Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей)
	4.2	Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы
	4.3	Определять координаты точки; проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами
5		**Уметь строить и исследовать простейшие математические модели**
	5.1	Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры
	5.2	Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин
	5.3	Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения
	5.4	Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий

6		**Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни**
	6.1	Анализировать реальные числовые данные, информацию статистического характера; осуществлять практические расчеты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах
	6.2	Описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках
	6.3	Решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения

Первичный балл	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Тестовый балл 2013 (2012)г.	0	5	10	15	20	24	28	32	36	40	44

Первичный балл	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
Тестовый балл 2013 (2012)г.	48	52	56	60	63	66	68	70	72	74	77

Первичный балл	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
Тестовый балл 2013 (2012)г.	79	81	83	85	87	90	92	94	96	98	100

Элементы содержания по МАТЕМАТИКЕ

для составления контрольных измерительных материалов

для проведения

вступительного экзамена

Код разде-ла	**Код контролиру-емого элемента**	**Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы**
1		**Алгебра**
1.1		*Числа, корни и степени*
	1.1.1	Целые числа
	1.1.2	Степень с натуральным показателем
	1.1.3	Дроби, проценты, рациональные числа
	1.1.4	Степень с целым показателем
	1.1.5	Корень степени $n > 1$ и его свойства
	1.1.6	Степень с рациональным показателем и ее свойства
	1.1.7	Свойства степени с действительным показателем
1.2		*Основы тригонометрии*
	1.2.1	Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла
	1.2.2	Радианная мера угла
	1.2.3	Синус, косинус, тангенс и котангенс числа
	1.2.4	Основные тригонометрические тождества
	1.2.5	Формулы приведения
	1.2.6	Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов
	1.2.7	Синус и косинус двойного угла
1.3		*Логарифмы*
	1.3.1	Логарифм числа
	1.3.2	Логарифм произведения, частного, степени
	1.3.3	Десятичный и натуральный логарифмы, число e
1.4		*Преобразования выражений*
	1.4.1	Преобразования выражений, включающих арифметические операции

	1.4.2	Преобразования выражений, включающих операцию возведения в степень
	1.4.3	Преобразования выражений, включающих корни натуральной степени
	1.4.4	Преобразования тригонометрических выражений
	1.4.5	Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования
	1.4.6	Модуль (абсолютная величина) числа
2		**Уравнения и неравенства**
2.1		*Уравнения*
	2.1.1	Квадратные уравнения
	2.1.2	Рациональные уравнения
	2.1.3	Иррациональные уравнения
	2.1.4	Тригонометрические уравнения
	2.1.5	Показательные уравнения
	2.1.6	Логарифмические уравнения
	2.1.7	Равносильность уравнений, систем уравнений
	2.1.8	Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными
	2.1.9	Основные приемы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных
	2.1.10	Использование свойств и графиков функций при решении уравнений
	2.1.11	Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем
	2.1.12	Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учет реальных ограничений
2.2		*Неравенства*
	2.2.1	Квадратные неравенства
	2.2.2	Рациональные неравенства
	2.2.3	Показательные неравенства
	2.2.4	Логарифмические неравенства
	2.2.5	Системы линейных неравенств
	2.2.6	Системы неравенств с одной переменной
	2.2.7	Равносильность неравенств, систем неравенств
	2.2.8	Использование свойств и графиков функций при решении неравенств
	2.2.9	Метод интервалов
	2.2.10	Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем
3		**Функции**
3.1		*Определение и график функции*
	3.1.1	Функция, область определения функции
	3.1.2	Множество значений функции
	3.1.3	График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях
	3.1.4	Обратная функция. График обратной функции

	3.1.5	Преобразования графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат
3.2		*Элементарное исследование функций*
	3.2.1	Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания
	3.2.2	Четность и нечетность функции
	3.2.3	Периодичность функции
	3.2.4	Ограниченность функции
	3.2.5	Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции
	3.2.6	Наибольшее и наименьшее значения функции
3.3		*Основные элементарные функции*
	3.3.1	Линейная функция, ее график
	3.3.2	Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, ее график
	3.3.3	Квадратичная функция, ее график
	3.3.4	Степенная функция с натуральным показателем, ее график
	3.3.5	Тригонометрические функции, их графики
	3.3.6	Показательная функция, ее график
	3.3.7	Логарифмическая функция, ее график
4		**Начала математического анализа**
4.1		*Производная*
	4.1.1	Понятие о производной функции, геометрический смысл производной
	4.1.2	Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком
	4.1.3	Уравнение касательной к графику функции
	4.1.4	Производные суммы, разности, произведения, частного
	4.1.5	Производные основных элементарных функций
	4.1.6	Вторая производная и ее физический смысл
4.2		*Исследование функций*
	4.2.1	Применение производной к исследованию функций и построению графиков
	4.2.2	Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах
4.3		*Первообразная и интеграл*
	4.3.1	Первообразные элементарных функций
	4.3.2	Примеры применения интеграла в физике и геометрии
5		**Геометрия**
5.1		*Планиметрия*
	5.1.1	Треугольник
	5.1.2	Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат
	5.1.3	Трапеция
	5.1.4	Окружность и круг
	5.1.5	Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника
	5.1.6	Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника

	5.1.7	Правильные многоугольники. Вписанная окружность и описанная окружность правильного многоугольника
5.2		*Прямые и плоскости в пространстве*
	5.2.1	Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые; перпендикулярность прямых
	5.2.2	Параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства
	5.2.3	Параллельность плоскостей, признаки и свойства
	5.2.4	Перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трех перпендикулярах
	5.2.5	Перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства
	5.2.6	Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур
5.3		*Многогранники*
	5.3.1	Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма
	5.3.2	Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде
	5.3.3	Пирамида, ее основание, боковые ребра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида
	5.3.4	Сечения куба, призмы, пирамиды
	5.3.5	Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр)
5.4		*Тела и поверхности вращения*
	5.4.1	Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка
	5.4.2	Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка
	5.4.3	Шар и сфера, их сечения
5.5		*Измерение геометрических величин*
	5.5.1	Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности
	5.5.2	Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями
	5.5.3	Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника
	5.5.4	Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми, расстояние между параллельными плоскостями
	5.5.5	Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора
	5.5.6	Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы
	5.5.7	Объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара
5.6		*Координаты и векторы*
	5.6.1	Декартовы координаты на плоскости и в пространстве
	5.6.2	Формула расстояния между двумя точками; уравнение сферы

	5.6.3	Вектор, модуль вектора, равенство векторов; сложение векторов и умножение вектора на число
	5.6.4	Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам
	5.6.5	Компланарные векторы. Разложение по трем некомпланарным векторам
	5.6.6	Координаты вектора; скалярное произведение векторов; угол между векторами
6		**Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей**
6.1		*Элементы комбинаторики*
	6.1.1	Поочередный и одновременный выбор
	6.1.2	Формулы числа сочетаний и перестановок. Бином Ньютона
6.2		*Элементы статистики*
	6.2.1	Табличное и графическое представление данных
	6.2.2	Числовые характеристики рядов данных
6.3		*Элементы теории вероятностей*
	6.3.1	Вероятности событий
	6.3.2	Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач

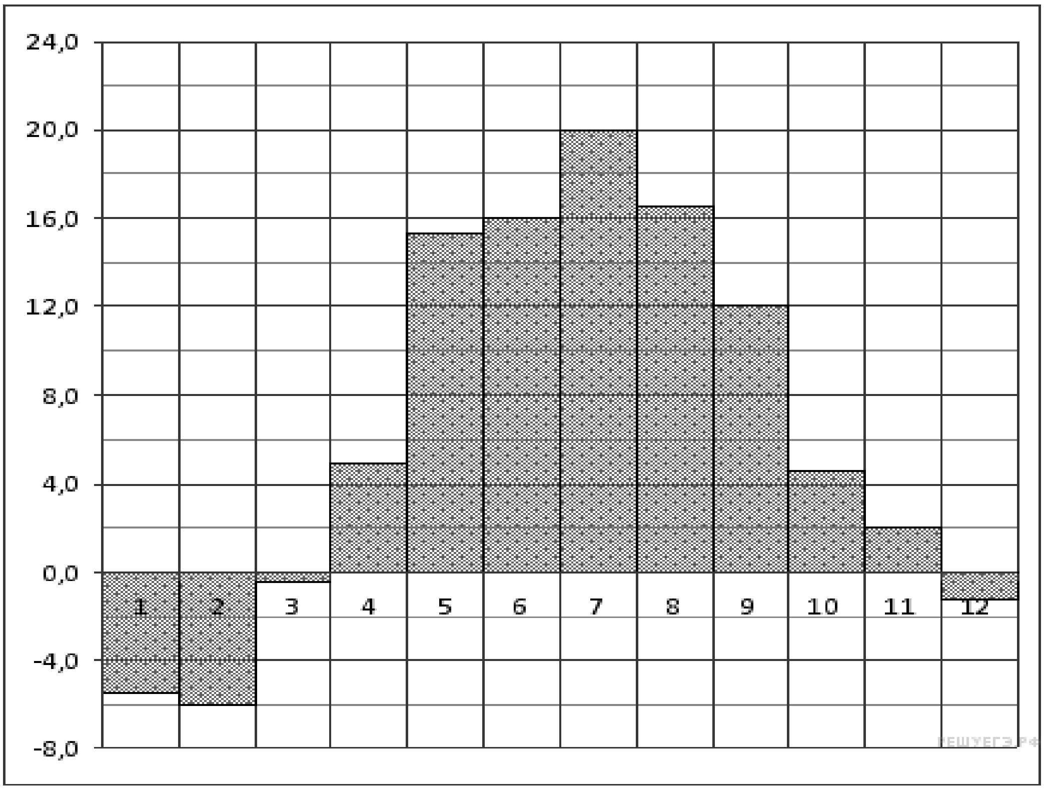
Демонстрационный вариант

экзаменационной работы по математике

Тип	Условие
В1	**В 1 № 77336.** Поезд Новосибирск-Красноярск отправляется в 15:20, а прибывает в 4:20 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути? Ответ:

Тип	
В2	**В 2 № 77353.** В сентябре 1 кг слив стоил 60 рублей. В октябре сливы подорожали на 25%. Сколько рублей стоил 1 кг слив после подорожания в октябре? Ответ:

Тип	Условие
В3	**В 3 № 27520.** На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура была отрицательной.



Ответ:

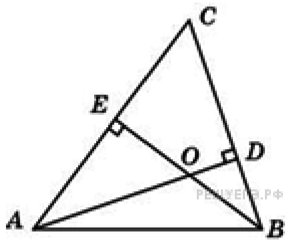
Тип	Условие
B4	**B 4 № 77361.** В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным на начало 2010 года).

Наименование продукта	**Тверь**	**Липецк**	**Барнаул**
Пшеничный хлеб (батон)	11	12	14
Молоко (1 литр)	26	23	25
Картофель (1 кг)	9	13	16
Сыр (1 кг)	240	215	260
Мясо (говядина) (1 кг)	260	280	300
Подсолнечное масло (1 литр)	38	44	50

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов: 2 батона пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Ответ:

Тип	Условие
B5	



B 5 № 27763. Два угла треугольника равны 58° и 72°. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.

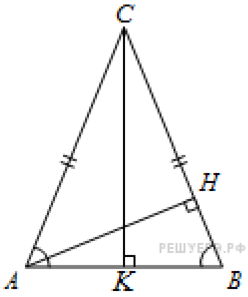
Ответ:

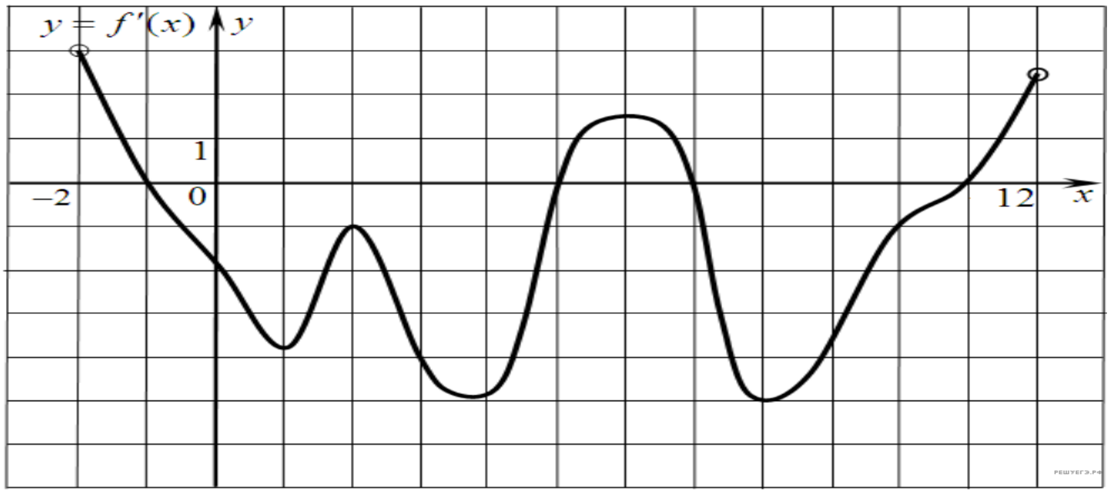
Тип	Условие
B6	**B 6 № 320187.** При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Ответ:

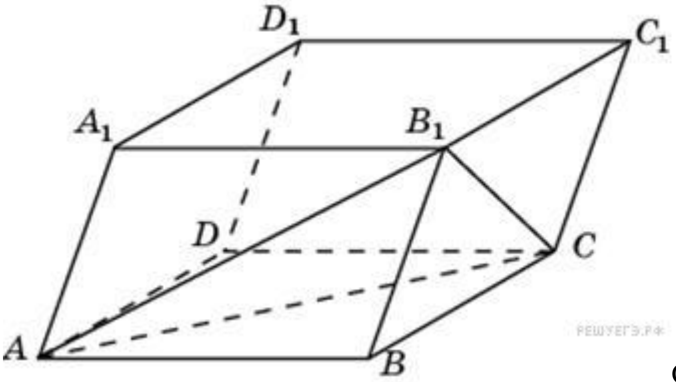
Тип	Условие

B7	**B 7 № 26660.** Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{6}{4x-54}}=\frac{1}{7}$. Ответ:

Тип	Условие
B8	 **B 8 № 27329.** В треугольнике ABC $AC=BC=27$, AH — высота, $\cos BAC=\frac{2}{3}$. Найдите BH. Ответ:

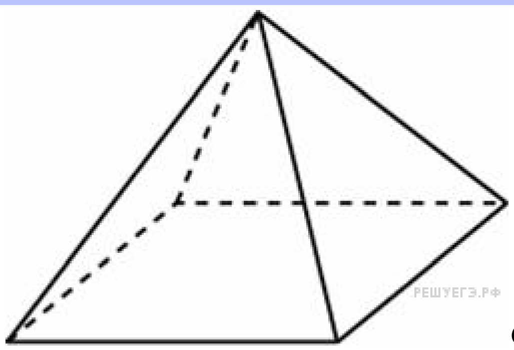
Тип	Условие
B9	**B 9 № 27500.** На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−2; 12). Найдите промежутки убывания функции *f(x)*. В ответе укажите длину наибольшего из них.  Ответ:

Тип	Условие

Тип	Условие
B10	 **B 10 № 27182.** Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12. Найдите объем треугольной пирамиды B_1ABC. Ответ:

Тип	Условие
B11	**B 11 № 26797.** Найдите значение выражения $\dfrac{(5a^2)^3\cdot(6b)^2}{(30a^3b)^2}$. Ответ:

Тип	Условие
B12	**B 12 № 27963.** Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi=\omega t+\dfrac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega=20^\circ/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta=4^\circ/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 1200°. Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ выразите в минутах. Ответ:

Тип	Условие
B13	 **B 13 № 27069.** Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды. Ответ:

Тип	Условие
B14	**B 14 № 99588.** Из двух городов, расстояние между которыми равно 560 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 65 км/ч и 75 км/ч? Ответ:

Тип	Условие
B15	**B 15 № 282860.** Найдите точку минимума функции $y=(x+3)^2(x+5)-1$. Ответ:

Тип	Условие
C1	**C 1 № 500427.** а) Решите уравнение $\sqrt{2}\cos^3 x-\sqrt{2}\cos x+\sin^2 x=0.$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2},4\pi\right]$.

Тип	Условие
C2	**C 2 № 500013.** В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки B до плоскости DEA_1.

Тип	Условие
C3	**C 3 № 502116.** Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^x-7\cdot 2^x+10\le 0, \\ \dfrac{x^3-3x^2+3x-3}{x^2-3x}\le x+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}. \end{cases}$

Тип	Условие
C4	**C 4 № 501398.** Стороны *AB* и *BC* треугольника *ABC* равны соответственно 26 и 14,5, а его высота *BD* равна 10. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники *ABD* и *BCD*.

Тип	Условие
C5	**C 5 № 500016.** Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=4x^2+4ax+a^2-2a+2$ на множестве $\lvert x\rvert \ge 1$ не менее 6.

Тип	Условие

С6	**С 6 № 484654.** Перед каждым из чисел 14, 15, . . ., 20 и 4, 5, . . ., 8 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решения

↥ Задание 1 тип B1

Поезд Новосибирск-Красноярск отправляется в 15:20, а прибывает в 4:20 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

Решение.
В день отправления поезд едет (24-15) $\cdot$ 60 − 20 = 9 $\cdot$ 60-20 = 520 минут, а на следующий день до момента прибытия он едет 4 $\cdot$ 60 + 20 = 260 минут. Всего в пути поезд проведет 520 + 260 = 780 минут. Разделим 780 на 60:

$$\frac{780}{60} = \frac{78}{6} = 13.$$

Значит, поезд находится в пути 13 часов.

Ответ: 13.

↥ Задание 2 тип B2

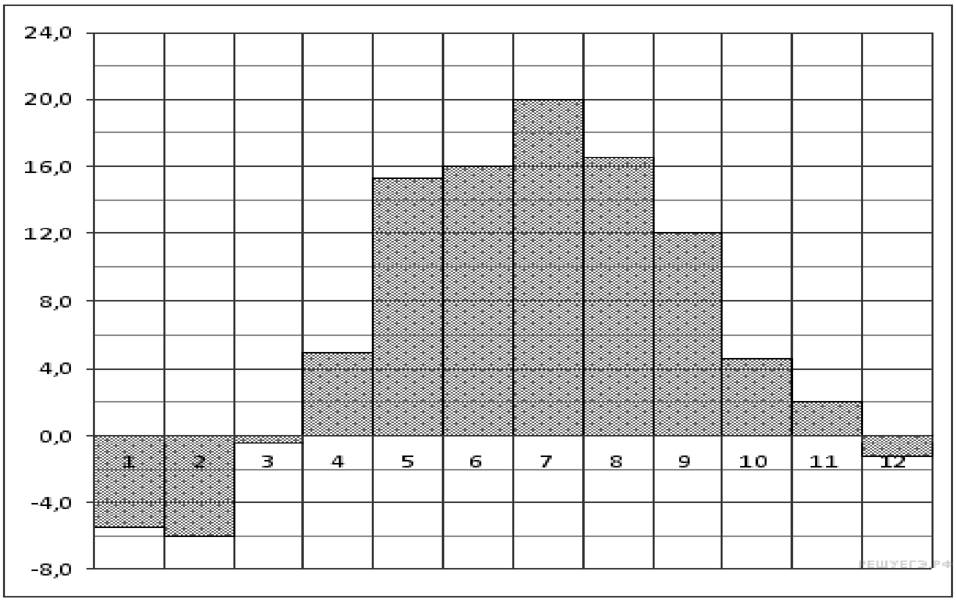
В сентябре 1 кг слив стоил 60 рублей. В октябре сливы подорожали на 25%. Сколько рублей стоил 1 кг слив после подорожания в октябре?

Решение.
В октябре сливы подорожали на 60 $\cdot$ 0,25 = 15 рублей. Значит, 1 кг слив после подорожания в октябре стал стоить 60 + 15 = 75 рублей.

Ответ: 75.

↥ Задание 3 тип B3

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура была отрицательной.



Решение.

Из диаграммы видно, что было 4 месяца с температурой ниже нуля (см. рисунок).

Ответ: 4.

↑ **Задание 4 тип B4**

В таблице указаны средние цены (в рублях) на некоторые основные продукты питания в трех городах России (по данным на начало 2010 года).

Наименование продукта	Тверь	Липецк	Барнаул
Пшеничный хлеб (батон)	11	12	14
Молоко (1 литр)	26	23	25
Картофель (1 кг)	9	13	16
Сыр (1 кг)	240	215	260
Мясо (говядина) (1 кг)	260	280	300
Подсолнечное масло (1 литр)	38	44	50

Определите, в каком из этих городов окажется самым дешевым следующий набор продуктов: 2 батона пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла. В ответ запишите стоимость данного набора продуктов в этом городе (в рублях).

Решение.

В Твери стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит $11 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 1,5 \cdot 260 + 1 \cdot 38 = 477$ руб.

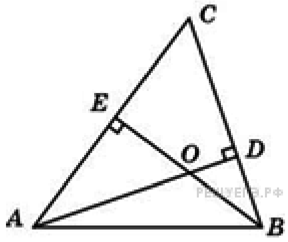
В Липецке стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит $12 \cdot 2 + 13 \cdot 3 + 1,5 \cdot 280 + 1 \cdot 44 = 527$ руб.

В Барнауле стоимость 2 батонов пшеничного хлеба, 3 кг картофеля, 1,5 кг говядины, 1 л подсолнечного масла составит $14 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 1,5 \cdot 300 + 1 \cdot 50 = 576$ руб.

Самый дешёвый набор продуктов можно купить в Твери по цене 477 руб.

Ответ: 477

↑ **Задание 5 тип B5**



Два угла треугольника равны 58° и 72°. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Сумма углов в выпуклом четырёхугольнике равна 360 градусам, следовательно,

$$\angle DOE = 360^\circ - \angle CDO - \angle CEO - \angle C =$$
$$= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - (180^\circ - 58^\circ - 72^\circ) = 130^\circ.$$

Ответ: 130.

↑ **Задание 6 тип B6**

При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если цель не уничтожена, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,4, а при каждом последующем — 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,98?

Решение.

Найдем вероятность противоположного события, состоящего в том, что цель не будет уничтожена за *n* выстрелов. Вероятность промахнуться при первом выстреле равна 0,6, а при каждом следующем — 0,4. Эти события независимые, вероятность их произведения равна произведению вероятности этих событий. Поэтому вероятность промахнуться при *n* выстрелах равна: $0,6\cdot(0,4)^{(n-1)}$.

Осталось найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$0,6\cdot(0,4)^{n-1}\le 0,02 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\le\frac{1}{30}.$$

Последовательно проверяя значения n, равные 1, 2, 3 и т. д. находим, что искомым решением является $n=5$. Следовательно, необходимо сделать 5 выстрелов.

Ответ: 5.

Примечание.

Можно решать задачу «по действиям», вычисляя вероятность уцелеть после ряда последовательных промахов:

P(1) = 0,6.
P(2) = P(1)·0,4 = 0,24.
P(3) = P(2)·0,4 = 0,096.

P(4) = P(3)·0,4 = 0,0384;
P(5) = P(4)·0,4 = 0,01536.

Последняя вероятность меньше 0,02, поэтому достаточно пяти выстрелов по мишени.

↑ Задание 7 тип B7

Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{6}{4x-54}}=\frac{1}{7}$.

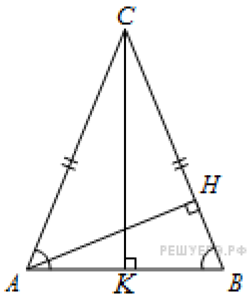
Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{\frac{6}{4x-54}}=\frac{1}{7}\Leftrightarrow\frac{6}{4x-54}=\frac{1}{49}\Leftrightarrow 294=4x-54\Leftrightarrow x=87.$$

Ответ: 87.

↑ Задание 8 тип B8



В треугольнике ABC $AC=BC=27$, AH — высота, $\cos BAC=\frac{2}{3}$. Найдите BH.

Решение.

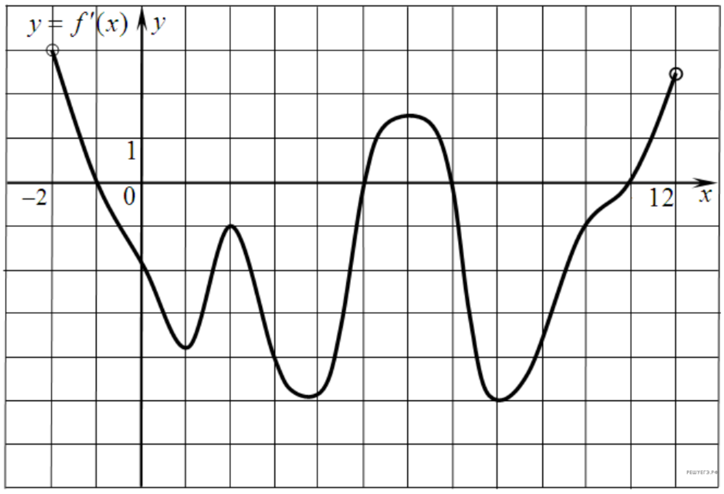
Треугольник ABC равнобедренный, значит, углы BAC и ABH равны как углы при его основании и высота, проведенная из точки C делит основание AB пополам.

$$BH=AB\cos\angle ABH=AB\cos\angle BAC=2AK\cos\angle BAC=$$
$$=2AC\cos^2\angle BAC=2\cdot 27\cdot\frac{4}{9}=24.$$

Ответ: 24.

↑ Задание 9 тип B9

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−2; 12). Найдите промежутки убывания функции *f(x)*. В ответе укажите длину наибольшего из них.

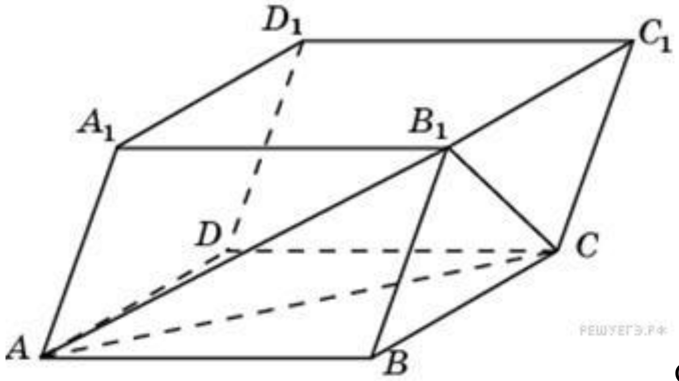


Решение.

Промежутки убывания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, то есть интервалам (−1; 5) длиной 6 и (7; 11) длиной 4. Длина наибольшего из них 6.

Ответ: 6.

↥ **Задание 10 тип B10**



Объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12. Найдите объем треугольной пирамиды B_1ABC.

Решение.

Объем параллелепипеда равен $V_{\text{пар}} = S_{\text{пар}}H_{\text{пар}}$, а объем пирамиды равен $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пир}}H_{\text{пир}}$. Высота пирамиды равна высоте параллелепипеда, а ее основание вдвое меньше, поэтому

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\text{пир}}H_{\text{пир}} = \frac{1}{3}\frac{S_{\text{пар}}}{2}H_{\text{пар}} = \frac{1}{6}S_{\text{пар}}H_{\text{пар}} = \frac{1}{6}\cdot 12 = 2.$$

Ответ: 2.

↑ Задание 11 тип B11

Найдите значение выражения $\dfrac{(5a^2)^3\cdot(6b)^2}{(30a^3b)^2}$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{(5a^2)^3\cdot(6b)^2}{(30a^3b)^2}=\frac{5^3a^6\cdot6^2b^2}{30^2a^6b^2}=\frac{5^3\cdot6^2}{5^2\cdot6^2}=5.$$

Ответ: 5.

↑ Задание 12 тип B12

Для сматывания кабеля на заводе используют лебедку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi=\omega t+\dfrac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega=20^\circ/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta=4^\circ/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет 1200°. Определите время после начала работы лебедки, не позже которого рабочий должен проверить ее работу. Ответ выразите в минутах.

Решение.

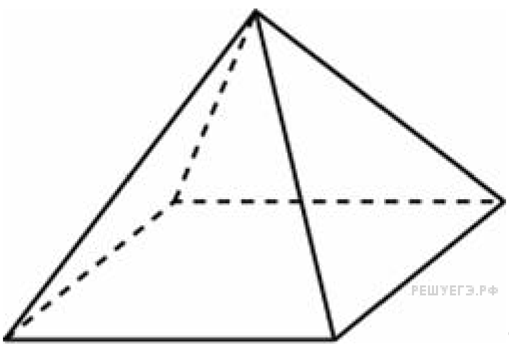
Задача сводится к нахождению наибольшего решения неравенства $\varphi\le1200$ при заданных значениях параметров ω и β:

$$\varphi\le1200\Leftrightarrow2t^2+20t\le1200\Leftrightarrow t^2+10t-600\le0\Leftrightarrow-30\le t\le20\ \text{мин}.$$

Учитывая то, что время — неотрицательная величина, получаем $t\le20$. Угол намотки достигнет значения 1200° при t = 20 мин.

Ответ: 20.

↑ Задание 13 тип B13



Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

Решение.

Площадь пирамиды равна

$$S = S_{бок} + S_{осн} = 4S_{\Delta} + a^2.$$

Площадь боковой стороны пирамиды $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ha$. Высоту треугольника h найдем по теореме Пифагора: $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Тогда площадь поверхности пирамиды

$$S = 4\left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10\right) + 10^2 = 340.$$

Ответ: 340.

↑ Задание 14 тип B14

Из двух городов, расстояние между которыми равно 560 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля. Через сколько часов автомобили встретятся, если их скорости равны 65 км/ч и 75 км/ч?

Решение.

Пусть t ч – время движения автомобилей до встречи. Первый автомобиль пройдет расстояние $65 \cdot t$ км, а второй – $75 \cdot t$ км. Тогда имеем:

$$65t + 75t = 560 \Leftrightarrow 140t = 560 \Leftrightarrow t = 4.$$

Таким образом, автомобили встретятся через 4 часа.

Ответ: 4.

↑ Задание 15 тип B15

Найдите точку минимума функции $y = (x+3)^2(x+5) - 1$.

Решение.

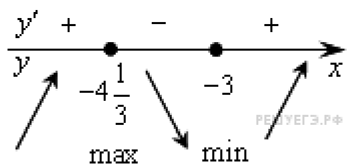
Найдем производную заданной функции:

$$y' = ((x+3)^2)'(x+5) + (x+3)^2(x+5)' - (1)' =$$
$$= 2(x+3)(x+5) + (x+3)^2 = (x+3) \cdot (2(x+5) + (x+3)) = (x+3)(3x+13).$$

Найдем нули производной:

$$(x+3)(3x+13) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = -4\frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = -3$.

Ответ: −3.

Проверка части C

Пожалуйста, оцените решения заданий части C самостоятельно, руководствуясь указанными критериями.

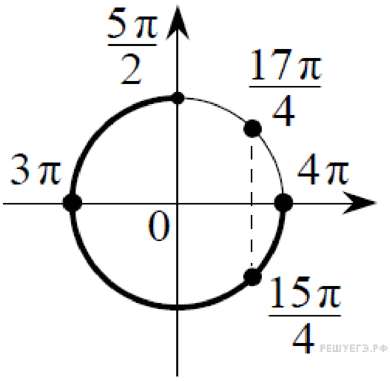
Задание C1 № 500427

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

а) Решите уравнение $\sqrt{2}\cos^3 x-\sqrt{2}\cos x+\sin^2 x=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}, 4\pi\right]$.

Решение.



а) Запишем уравнение в виде:

$$\sqrt{2}\cos x(\cos^2 x-1)+\sin^2 x=0 \Leftrightarrow \sin^2 x(1-\sqrt{2}\cos x)=0.$$

Значит, или $\sin x=0,$ откуда $x=\pi k, k\in\mathbb{Z},$ или $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},$ откуда $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}, 4\pi\right]$. Получим числа: $3\pi, \frac{15\pi}{4}, 4\pi.$

Ответ: а) $\pi k,$ $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z};$ б) $3\pi, \frac{15\pi}{4}, 4\pi.$

Ваша оценка (баллов):

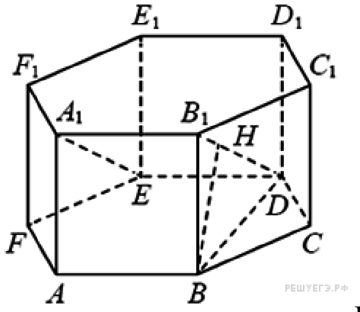
Задание C2 № 500013

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Решение содержит переход к планиметрической задаче, но: - получен неверный ответ или решение не закончено; - при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки B до плоскости DEA_1.

Решение.



Прямые BB_1 и DB перпендикулярны прямой ED. Плоскость DEA_1, содержащая прямую ED, перпендикулярна плоскости BB_1D. Значит, искомое расстояние равно высоте BH прямоугольного треугольника BB_1D, в котором $BB_1=1$, $BD=\sqrt{3}$, $B_1D=2$. Тогда

$$BH=\frac{2S_{BB_1D}}{B_1D}=\frac{BB_1\cdot BD}{B_1D}=\frac{1\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ваша оценка (баллов):

Задание C3 № 502116

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обосновано получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных	0
Максимальный балл	3

Решите систему неравенств $\begin{cases} 4^x-7\cdot 2^x+10\le 0, \\ \dfrac{x^3-3x^2+3x-3}{x^2-3x}\le x+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $4^x - 7\cdot 2^x + 10 \le 0.$ Пусть $t = 2^x,$ тогда неравенство примет вид: $t^2 - 7t + 10 \le 0,$ откуда

$$2 \le t \le 5 \Leftrightarrow 2 \le 2^x \le 5 \Leftrightarrow 1 \le x \le \log_2 5.$$

Решение первого неравенства системы $1 \le x \le \log_2 5.$

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 3}{x^2 - 3x} \le x + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x^2 - 3x)}{x^2 - 3x} + \frac{x-3}{x(x-3)} + \frac{2x}{x(x-3)} \le x + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} \le 0,$$ где $x \ne 0.$

Решение второго неравенства исходной системы: $x < 0 \Leftrightarrow 0 < x \le 1 \Leftrightarrow 2 < x < 3.$

3. Поскольку $2 < \log_2 5 < 3,$ получаем решение исходной системы неравенств: $x = 1; 2 < \log_2 5 < 3$

Ответ: 1; (2; $\log_2 5$].

Ваша оценка (баллов):

Задание C4 № 501398

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины или рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, но получен неправильный ответ из-за одной арифметической ошибки (описки)	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки (описки)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 26 и 14,5, а его высота BD равна 10. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD.

Решение.

Пусть точки O и P — центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD соответственно, R и r — радиусы этих окружностей, а точки E и F — точки, в которых окружности касаются отрезка BD. Из прямоугольных треугольников ABD и BCDнаходим:

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 24,\ R = \frac{AD + BD - AB}{2} = \frac{24 + 10 - 26}{2} = 4,$$

$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = 10{,}5,\ r = \frac{CD + BD - BC}{2} = \frac{10{,}5 + 10 - 14{,}5}{2} = 3.$$

Опустим из точки O перпендикуляр OK на прямую FP (см. рис. 1, 2). Искомое расстояние OP находим из прямоугольного треугольника OKP: $OP = \sqrt{OK^2 + PK^2}.$

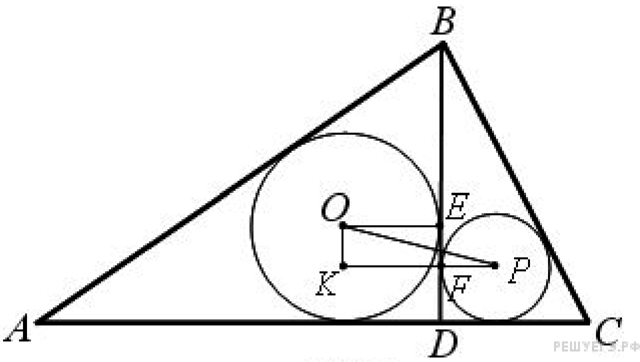


Рис.1

1 случай (точка D лежит между точками A и C, см. рис. 1):

$$OK = EF = DE - EF = R - r,$$

$$PK = PF + FK = PF + EO = R + r,$$

$$OP = \sqrt{(R-r)^2 + (R+r)^2} = 5\sqrt{2}.$$

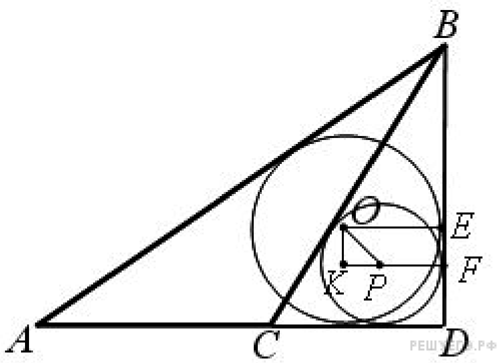


Рис.2

2 случай (точка C лежит между точками A и D, см. рис. 2):

$$OK = EF = DE - EF = R - r,$$

$$PK = FK - PF = EO - PF = R - r,$$

$$OP = \sqrt{(R-r)^2 + (R-r)^2} = \sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$ или $\sqrt{2}.$

Ваша оценка (баллов):

Задание C5 № 500016

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены искомые значения, возможно неверные, из-за одной допущенной вычислительной ошибки (описки)	3
С помощью верного рассуждения получено одно значение параметра (возможно неверное из-за одной вычислительной ошибки), а второе значение потеряно в результате ошибки (например «потеряны» модули)	2
Задача сведена к исследованию взаимного расположения графиков неравенства и уравнения (приведен правильный рисунок)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=4x^2+4ax+a^2-2a+2$ на множестве $|x| \ge 1$ не менее 6.

Решение.

Графиком функции $f(x)=(2x+a)^2-2a+2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина имеет координаты $\left(-\frac{a}{2};\ -2a+2\right)$. Значит, минимум функции $f(x)$ на всей числовой оси достигается при $x=-\frac{a}{2}$.

На множестве $|x| \ge 1$ эта функция достигает наименьшего значения либо в точке $x=-\frac{a}{2}$, если эта точка принадлежит множеству, либо в одной из граничных точек $x=\pm 1$.

Если наименьшее значение функции не меньше 6, то и всякое значение функции не меньше 6. В частности,

$$f(1)\ge 6;\ a^2+2a+6\ge 6;\ a(a+2)\ge 0,$$

$$f(-1)\ge 6;\ a^2-6a+6\ge 6;\ a(a-6)\ge 0,$$

откуда получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a(a+2)\ge 0, \\ a(a-6)\ge 0, \end{cases}$$

решениями которой являются $a\le -2;\ a=0;\ a\ge 6$.

При $a\le -2$ имеем: $-\frac{a}{2}\ge 1$, значит наименьшее значение функции достигается в точке $x=-\frac{a}{2}$ и $f\left(-\frac{a}{2}\right)=-2a+2\ge 6$, что удовлетворяет условию задачи.

При $a=0$ имеем: $-\frac{a}{2}=0$, значит, наименьшее значение функции достигается в одной из граничных точек $x=\pm 1$, в которых значение функции не меньше 6.

При $a \geq 6$ имеем: $-\frac{a}{2} \leq -3$, значит, наименьшее значение функции достигается в точке $x=-\frac{a}{2}$ и $f\left(-\frac{a}{2}\right)=-2a+2 \leq -10$, что не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a \leq -2;\ a=0$.

Ваша оценка (баллов):

Задание C6 № 484654

Критерии оценивания ответа на задание С6	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Решение не содержит логических пробелов, получен ответ, неверный только из-за вычислительной ошибки или описки.	3
Решение доведено до ответа, но содержит логические пробелы, вычислительные ошибки или описки. 2	2
Рассмотрены некоторые случаи. Для рассмотренных случаев получен ответ, возможно неверный из-за ошибок.	1
Все прочие случаи.	0
Максимальное количество баллов	**4**

Перед каждым из чисел 14, 15, . . ., 20 и 4, 5, . . ., 8 прозвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа первого набора взяты с плюсами, а второго — с минусами, то сумма максимальна и равна

$$5(14+\ldots+20)-7(-4-\ldots-8)=5\left(\frac{14+20}{2}\cdot 7\right)+7\left(\frac{4+8}{2}\cdot 5\right)=35\cdot 23=805.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней — нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при изменении знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из полученны сумм будет не четной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$5(-14-15+16-17+18-19+20)-7(-4+5+6-7-8)=-5\cdot 11+7\cdot 8=-55+56=1.$$

Ответ: 1 и 805.

Ваша оценка (баллов):